

الاستقرار بانتظام:

تعريف: ليكن (E, d) و (F, ρ) مضايفين مترين و f تطبيقاً معرفاً على المجموعة الجزئية D من E و بأخذ متية في F ، نقول f أن مستقر بانتظام على D إذا ما لكل عدد حقيقي موجب ϵ عدد حقيقي موجب δ بحيث أنه إذا كان x و y أي عنصرين من D يحققانه $d(x, y) < \delta$ فإن $\rho(f(x), f(y)) < \epsilon$

ملاحظة:

1. واضح أن كل تطبيقاً مستقر بانتظام هو تطبيقاً مستمر ولكن العكس غير صحيح الحالة العامة فالدالة $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ ; x \mapsto f(x) = x^2$ مستمرة ولكن ليست مستقرة بانتظام.
 ففي إذا كان ϵ عدداً حقيقياً موجباً فإنه يوجد كل عدد حقيقي موجب δ عدداً حقيقياً موجباً $x = \frac{\epsilon}{\delta}$ و $y = x + \frac{\delta}{2}$ بحيث يكون:

$$d(x, y) = |y - x| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &= |y^2 - x^2| = |y - x| (y + x) \\ &= \frac{\delta}{2} (2x + \frac{\delta}{2}) \end{aligned}$$

$$= \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta x = \epsilon$$

$f(x)$ ليست مستقرة بانتظام.

2. تركيب تطبيقين مستمرين بانتظام هو تطبيقاً مستقر بانتظام.

مبرهنة:

إذا كان $(V, \|\cdot\|)$ فضاءً مترياً فإن التطبيقاً:

$$1) N: V \rightarrow \mathbb{R}_+ ; x \mapsto N(x) = \|x\|$$

$$2) V \times V \rightarrow V ; (x, y) \mapsto x + y$$

$$3) V \rightarrow V ; x \mapsto a \cdot x, \text{ } a \neq 0 \in \mathbb{R}$$

$$4) \mathbb{R} \rightarrow V ; a \mapsto ax, \text{ } x \in V$$

مسترة بانتظام .

البرهان ١

١- يقابل كل عدد حقيقي موجب ϵ عدد حقيقي موجب $\delta = \epsilon$ بحيث إذا كان x و y أي عنصرين من V يحققان المسافة بين x, y .

$$d(x, y) = \|y - x\| < \delta$$

فإن :

$$\|N(x) - N(y)\| = \|y - x\|$$

$$d(N(x), N(y)) = \|N(y) - N(x)\| = \|y - x\|$$

$$\|y - x\| \leq \|y - x\| \quad \text{توضيح:} \quad \leq \|y - x\| < \delta = \epsilon$$

تطبيقاً مستر بانتظام

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= \langle y - x, y - x \rangle = \langle y, y - x \rangle + \langle -x, y - x \rangle \\ &= \langle y, y \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \\ &= \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

$$\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \quad \text{ولكن}$$

$$-2\langle x, y \rangle \geq -2|\langle x, y \rangle|$$

$$\|y - x\|^2 \geq \langle y, y \rangle - 2|\langle x, y \rangle| + \langle x, x \rangle$$

وحسب متباينة كوشي-شوارز .

$$\|y - x\|^2 \geq \langle y, y \rangle - 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} + \langle x, x \rangle$$

$$\|y - x\|^2 \geq \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| + \|x\|^2 \Rightarrow \|y - x\|^2 \geq (\|y\| - \|x\|)^2$$

$$\Rightarrow \|y - x\| \geq |\|y\| - \|x\||$$

٢- يقابل كل عدد حقيقي موجب ϵ عدد حقيقي موجب $\delta = \epsilon$ بحيث إذا كان $(x, y), (x', y')$ عناصر اختيارية من $V \times V$ بحيث أن :

$$d((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$$

$$= \|x - x'\| + \|y - y'\| < \delta$$

$$d(x+y, x'+y') = \|x+y - (x'+y')\| = \|(x-x') + (y-y')\| < \delta$$

$$\|x-x'\| + \|y-y'\| < \delta = \epsilon$$

ومنه فإن التطبيق مستمر انتظام .

٢. يقابل كل عدد حقيقي موجب ϵ عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\epsilon}{\|a\|}$ بحيث إذا كان x, y عنصران اختياريان من V بحيث :

$$d(x, y) < \delta$$

$$\text{فإن } d(ax, ay) = \|ax - ay\| < \delta$$

$$d(ax, ay) = \|ax - ay\| = \|a \cdot (x - y)\|$$

$$= \|a\| \cdot \|x - y\| < \|a\| \cdot \delta = \epsilon$$

ومنه فإن التطبيق مستمر انتظام .

٣. يقابل كل عدد حقيقي موجب ϵ عدد حقيقي موجب $\delta = \frac{\epsilon}{\|x_0\|}$ بحيث أنه من أجل أي عنصرين a و b من R بحيث أن

$$d(a, b) = |a - b| < \delta$$

فإن

$$d(ax_0, bx_0) = \|ax_0 - bx_0\| = \|(a-b) \cdot x_0\| = |a-b| \cdot \|x_0\| < \delta$$

$$< \delta \cdot \|x_0\| = \epsilon$$

فإن التطبيق مستمر انتظام .

فضاءات الدوال المحددة والمحدودة المستمرة:

لقد رمزنا سابقاً للمجموعة كل الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة على مجموعة غير خالية X بالرمز $B(X, R)$ ووجدنا أنه إذا زدنا هذه المجموعة بعمليات جمع والتنا ضرب دالة بعدد حقيقي فإنها تصبح فضاءاً متجهياً حقيقياً ورأينا أنه مثال سابقه أنه التطبيق لمطلقاً

$$B(X, R) \rightarrow R \text{ : } f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

يعرف على الفضاء $B(X, R)$ نظيم التقارب المنتظم.

وإذا كانت f, g المولدة هذا النظيم أم

$$\|f - g\| = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

فإن: $B(X, R)$ يصبح فضاءاً أمترياً عندئذ يمكننا أن نتكلم عن تقارب متتالية دوال f_n في $B(X, R)$ سبيلاً الآن أن $B(X, R)$ هو فضاء تام.

مبرهنة:

فضاء الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة على مجموعة غير خالية X : الفضاء $B(X, R)$ فضاء تام.

البرهان:

إذا كانت f_n متتالية كوشية في الفضاء $B(X, R)$ فيقابل (استناداً لتعريفه) كل عدد حقيقياً موجب ϵ عدد صحيح موجب N_ϵ بحيث إذا كان $p \geq N_\epsilon$ و $q \geq N_\epsilon$ فإن الماتمة بينا:

$$\|f_p - f_q\| = \sup_{x \in X} |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon$$

وبالتالي فإن $\epsilon > \|f_p - f_q\|$ وذلك $\forall x \in X$ وهذا يعني أن متتالية الأعداد الحقيقية $f_p(x) - f_q(x)$ متتالية كوشية وبالتالي "حب نتيجة سابقة" فهي متتالية متقاربة. لنعرف الدالة f :

$$f: X \rightarrow R \text{ : } x \mapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

نكون متتالية الأعداد الحقيقية
وهي متتالية كوشيه

ولنا جذ عدد طبيعي n ويحقق $n \geq N_\epsilon$ بما أن

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad m \geq N_\epsilon$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X$$

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \text{ومن هنا}$$

ومن هنا نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ وبالتالي فإن المتتالية f_n متقاربة من النقطة f .
ومن هنا نستنتج أن الفضاء $B(X, R)$ هو فضاء تام.

نتيجة:

فضاء الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة على مجموعة X فضاء باناخ.
(أي أنه فضاء منظم تام).

إذا فرضنا أن X فضاء مترى فيمكن أن نتكلم عن استقرار الدوال الحقيقية المعرفة والمحدودة والمستمرة على X . لنرمز بـ (X, R) لتلك المجموعة الجزئية من $B(X, R)$ أم أن (X, R) هي مجموعة الدوال الحقيقية المحدودة المستمرة والمعرفة على الفضاء المترى X وإذا كانت f و g دالتين حقيقيتين مستمرتين على X و a عدد حقيقي ما فإنه يبرهن أن الدالتين $f+g$ و af مستمرتان أيضاً على X ومنه نستنتج

نتيجة:

مجموعة الدوال الحقيقية المحدودة والمستمرة المعرفة على فضاء مترى X أي المجموعة $C(X, R)$ هي فضاء متجهي حقيقي.

مبرهنة:

$C(X, R)$ مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المترى $B(X, R)$

البرهان:

إذا كانت f دالة من $D(x, R)$ متصلة إلى الفضاء $C(x, R)$ فيمكن أن نثبت أن f تنتمي إلى $C(x, R)$ وبالتالي يكفي أن تكون f مستمرة في نقطة اختيارية x_0 من X .

بما أن f متصلة للمجموعة $C(x, R)$ فيوجد من أجل أي عدد حقيقي موجب ϵ دالة g من $C(x, R)$ بحيث يكون

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

ومن ثم

$|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ وذلك $\forall x \in X$ وبما أن g مستمرة في x_0 وبالتالي يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث أي x كانت $x \in X$ و $|x - x_0| < \delta$ فإن المسافة $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ وعندئذ فإن $\forall x \in X$ الذي يحقق المسافة $|x - x_0| < \delta$ فإن المسافة $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - g(x) + g(x) - g(x_0) + g(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$< |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| <$$

$$\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

ومن ثم ينتج أن f مستمرة وبالتالي $f \in C(x, R)$.

التطبيقات الخطية والتطبيقات الخطية المستمرة:

تعريف: ليكن E و F فضاءين حقيقيين نقول عن تطبيق T للفضاء E إلى F أنه خطي إذا حقق الشرطين:

$$1- T(x, y) = T(x) + T(y)$$

$$2- T(ax) = a T(x)$$

وذلك إذا كان x و y من E و a من R .

ويمكن التحقق من الشرط اللازم والكاف كما يكون التطبيق T خطياً هو أن يتحقق
المعادلة:

$$T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$$

x, y من E ، و a, b من F

نتيجة:

يمكن التحقق من أن مجموعة التطبيقات الخطية للفضاء المتجهي الحقيقي E في الفضاء
المتجهي الحقيقي F مزودة بعملية جمع تطبيقتين خطيتين:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

وجداً تطبيقاً خطياً بعدد

$$(aT)(x) = aT(x)$$

حيث a من F ، متجه حقيقي.

لنفرض الآن أن E ذات بعد n ، و F ذات بعد m ،
ولكن F قاعدة للفضاء E ، $\{e_1, \dots, e_n\}$ قاعدة للفضاء F ،
وإذا كان $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ عنصراً من E ، $y = \sum_{j=1}^m y_j g_j$ عنصراً من F يتحقق
 $T(x) = y$ وكان

$$T(e_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{m1}g_m$$

$$T(e_2) = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + \dots + a_{m2}g_m$$

$$T(e_n) = a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \dots + a_{mn}g_m$$

فمن ثمة:

$$\sum_{j=1}^m y_j g_j = y = T(x) = T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^m a_{ji} g_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i g_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) g_j$$

$$\sum_{j=1}^m y_j g_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) g_j \Rightarrow y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i , \quad j=1, \dots, m$$

ونكتب المعادلات السابقة مصفوفياً بالشكل :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

وإذا فرضنا x للمصفوفة العمودية المتكاملة من مركبات المتجه x بالنسبة للقاعدة $\{e_1, \dots, e_n\}$ ود y للمصفوفة العمودية المتكاملة من مركبات المتجه $y = T(x)$ بالنسبة للقاعدة $\{g_1, \dots, g_m\}$ فإن العلاقة بين المصفوفتين الأخيرة تكتب بالشكل $y = Ax$ حيث A للمصفوفة من النوع $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$